טורים מחליפי סימן

<u>הגדרה</u>: טור מחליף סימן הוא טור מהצורה $\sum a_n$, כך ש- $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, ו- $b_n = |a_n| \geq 0$.

ה"פלוס 1" ב- $(-1)^{n+1}$ זו קונבנציה שלפיה האיבר הראשון בטור הוא חיובי, אבל כמובן שגם טור שמתחיל בסימן שלילי יכול להיות "טור מחליף סימן". אבל מכיוון ששני סוגי הטורים הם פשוט מכפלה זה של זה במינוס אחד, אין הגבלה על הכלליות בלהניח את הצורה הזו.

שימו לב: לפעמים דורשים $b_n > 0$, אבל אין שום בעיה עם הדרישה של אי השיוויון החלש. מה שכן זה עשוי לבלבל, כי למשל $\{2,0,0,0,1,0,0,-6,\dots\}$ יכול לשמש כהתחלה של טור מחליף סימן לפי ההגדרה אבל $\{2,0,0,1,0,0,-6,\dots\}$ לא.

מצד שני, אנחנו רואים שבעצם כל טור אפשר להפוך לטור בעל סימנים מתחלפים ע"י הוספה של אפסים בכל מיני מקומות באמצע כדי לספור אותם לנוחותינו כ"חיוביים" או ש"שליליים". מה שכן, השיטה הזו לא באמת הולכת לעזור לנו, כי העניין המרכזי שלנו בטורים בעלי סימנים מתחלפים, מעבר לזה שהם נפוצים למדי ביישומים, הוא:

<u>משפט לייבניץ</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ טור מחליף סימן. אם הסדרה b_n יורדת מונוטונית לאפס, אז הטור מתכנס, סכומו מקיים $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \leq b_1$, שארית הטור (השגיאה בסכימה חלקית) מקיימת $r_n \leq |b_{n+1}|$ וסימנה כסימנו של האיבר הבא בטור.

שימו לב לכך שמשפט לייבניץ אומר די הרבה דברים. כמו כן, שימו לב לכך שיש בו שלושה תנאים, שאחד מהם הוא התקיימות התנאי ההכרחי.
שימו לב גם לכך שטור בעל סימנים מתחלפים שיש בו אפסים לא יכול לקיים את תנאי המונוטוניות של לייבניץ, אלא אם כן הוא אפס זהותית ממקום מסוים ואז ברור שהוא מתכנס והסיפור לא רלוונטי. בואו נבחן שתי דוגמאות פשוטות בזריזות ואח"כ נעבור להוכחה:
<u>דוגמה</u>: הטור ההרמוני המתחלף. מקיים את תנאי המשפט (<u>סימנים מתחלפים, ערך מוחלט מונוטוני יורד, שואף לאפס</u>) ולכן יש לו גבול.

לבדיקת ההתכנסות נחשב את הסכומים החלקיים: $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$, $S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \simeq 0.833$, $S_4 = S_3 - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \simeq 0.583$, $S_5 = S_4 + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \simeq 0.783$, $S_6 = S_5 - \frac{1}{6} = \frac{37}{60} \simeq 0.617$ (<u>לצייר</u>). מהביטויים האלה ומהמשפט אנחנו מקבלים הערכה נומרית לערכו של הגבול. ספציפית חייב להתקיים $0.617 < S < 0.783$ (<u>לצייר</u>). בשלב הזה טבעי לנחש שמתקיים $S = \ln(2) \simeq 0.693$ כפי שנוכיח בהמשך הקורס.

<u>דוגמה</u>: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ מקיים את התנאים. נחשב שוב סכומים חלקיים: $S_0 = 1$, $S_1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = S_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $S_3 = S_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \simeq 0.333$, $S_4 = S_3 + \frac{1}{24} = \frac{3}{8} = 0.375$, $S_5 = S_4 - \frac{1}{120} = \frac{11}{30} \simeq 0.367$, $S_6 = S_5 + \frac{1}{720} = \frac{53}{144} \simeq 0.368$. ההערכה הנומרית נותנת לנו במקרה הזה תוצאה שמדויקת בדיוק עד מספר הספרות שעקבנו אחריהן בחישוב. קל לנחש כעת שהטור מתכנס ל- $e^{-1} \simeq 0.36788$ כמו שנוכיח בהמשך.

שימו לב להבדל חשוב בין שתי הדוגמאות האלה. הדוגמה השנייה הייתה של טור מתכנס בהחלט ולכן אין לנו כאן באמת צורך במשפט לייבניץ. הדוגמה הראשונה לעומת זאת היא של טור מתכנס בתנאי. זה המצב העיקרי בו יעניין אותנו להשתמש במבחן לייבניץ. מבחינת "אלגוריתם לבדיקת טורים התכנסות" <u>בדיקת התכנסות בהחלט קודמת לבדיקת התנאים במשפט לייבניץ, למעט בדיקת התנאי ההכרחי</u>, כי אם הטור מתכנס בהחלט אז אין צורך להשתמש בלייבניץ בכל מקרה אבל אם הוא מקיים את תנאי לייבניץ אנחנו עדיין צריכים לבדוק האם הוא מתכנס בהחלט, כי בד"כ זה גם יעניין אותנו.
שימו לב גם לכך שהטור המתכנס בהחלט מתכנס הרבה יותר מהר ולכן קל יותר להערכה נומרית. זה גם לא מקרה.
נעבור כעת להוכחת המשפט:
<u>הוכחה</u>: נכתוב $S_{2n} = (b_1 - b_2) + \dots + (b_{2n-1} - b_{2n})$ (שימו לב שלא יכולה להיות בעיה עם הסוגריים כי זה סכום סופי).
מהכתיבה הזו וממונוטוניות b_n מתקבל שזו סדרה מונוטונית עולה (<u>לצייר</u> נקודות).
מצד שני $S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \leq b_1$ ולכן זו סדרה חסומה מלעיל, ולכן יש לה גבול.
באופן דומה, הסדרה $S_{2n-1} = b_1 - (b_2 - b_3) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1})$ היא מונוטונית יורדת וחסומה ולכן גם לה יש גבול. כיוון שמתקיים $S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \to 0$, אז זה אותו הגבול, ולכן, לפי משפט שלמדתם באינפי' 1, זה הגבול של S_n כולה,

ומהגדרת הגבול של הטורים זהו סכום הטור. מהבנייה ברור גם למה מתקיימות התכונות הנוספות שעוסקות בהערכת הטור והשגיאה.

לפני שנעבור לנושא הבא נבחן עוד כמה דוגמאות פשוטות:

<u>דוגמה</u>: הטור: $\sum(-1)^{n+1}\frac{(n-1)^2}{n^3}$ מקיים את התנאים ממקום מסוים. מונוטוניות יורדת ניתן לקבל מהערכת הנגזרת של הפונקציה המתאימה לסדרה, שנותנת פרבולה שלילית חלקי x^4, $f'(x)=-\frac{3-4x+x^2}{x^4}$. אין צורך אפילו למצוא את האפסים של הפרבולה כדי לדעת שמהימני שבהם (ששווה ל- 3 במקרה הנוכחי) ואילך הנגזרת שלילית. מספיק טוב לענייננו והטור מקיים גם את הדרישות הנוספות ולכן מתכנס.

<u>דוגמה</u>: הטור $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$ מקיים 2 מתוך שלוש הדרישות של משפט לייבניץ, אבל האיבר הכללי שואף לחצי ולכן הטור מתבדר כי לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טורים.

שימו לב שבעוד שתנאי ההתכנסות לאפס של הסדרה הוא התנאי ההכרחי המוכר לנו להתכנסות של סדרה, <u>תנאי המונוטוניות איננו תנאי הכרחי להתכנסות</u>. זה תנאי מספיק, כמו שהמשפט מראה, אבל קיימים טורים בעלי סימנים מתחלפים שלא מקיימים אותו ועדיין מתכנסים. למשל $1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=2\ln(2)$ (זה עוד עניין, שלא חשוב כמה פעמים אומרים אותו, מוצאים בסוף טעויות במבחן בגללו).

עוד עניין שכדאי להיות מודעים אליו הוא שהגבול של טור לייבניץ יכול להיות מחושב בצורה הרבה יותר יעילה מסתם ע"י חסימה בין זוג איברים עוקבים. למשל, כיוון שידוע לנו שסדרת הסכומים החלקיים היא לסירוגין מעל ומתחת לערכו של הגבול, ברור שהממוצע בין שני אברים סמוכים יהיה קרוב יותר לגבול מכל אחד משניהם. במקרה שראינו של הטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים אנחנו יכולים לחשב $\frac{S_4+S_5}{2}\simeq 0.683$, $\frac{S_5+S_6}{2}\simeq 0.700$ ומתקבל בשלה הזה דיוק של אחוז אחד בהערכת הגבול, לעומת דיוק של כ- 12 אחוזים ע"י בחינת הסכומים החלקיים בנפרד.

למעשה קיימים אלגוריתמים יעילים אף יותר: <u>"אלגוריתמים להאצת התכנסות"</u>, שמאפשרים לקבל ביעילות הערכה לגבולות של טורי לייבניץ אפילו של טורים מתכנסים בתנאי שמתכנסים אפילו לאט יותר מהדוגמה הזו, אבל לא נכנס לזה.

תכונות אלגבריות של טורים

בתחילת הקורס דיברנו על התכונות האלגבריות של החיבור: <u>חילופיות, קיבוציות, ודיסטריבוטיביות (חוק הפילוג)</u>. טענו שהם חייבים להתקיים לטורים סופיים, בגלל אינדוקציה, אבל שאין הצדקה לכך שהם יתקיימו לטורים אינסופיים. כעת נבדוק האם התכונות האלה מתקיימות לטורים מתכנסים, ובאילו תנאים.

ראשית, הזכרנו כבר שחוק הפילוג מתקיים לטורים מתכנסים במובן הבא: $\forall c\neq 0:\sum ca_n=c\sum a_n$. כמובן שמתקיים גם $c\sum a_n+c\sum b_n=c\left(\sum a_n+\sum b_n\right)$, אבל זו לא תכונה של טורים אלא של מספרים. מרגע שידוע לנו שהטורים מתכנסים, כל חישוב שאנחנו עושים שמערב רק את תוצאת הטור, מבלי לשנות את אברי הטור, הוא חישוב רגיל עם מספרים.

נבדוק כעת <u>קיבוציות</u>. במקרה הפשוט ביותר: האם לטור מתכנס מתקיים בהכרח השוויון הבא: $a_1+a_2+a_3+a_4+...=\left(a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4\right)+...$? והכללת ביטוי זה, כינוס האברים לסוגריים שונים בעלי אורך סופי, מבלי לשנות את הסדר הכללי של הסכימה. (<u>הצעות</u>?).

שימו לב, ראינו כבר שמתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, ובלבד שאגף שמאל מוגדר, אבל זו לא קיבוציות. ראשית, אנחנו מחליפים שני גבולות שצריך לחשב בגבול אחד, ושנית, שינינו את סדר הסכימה: במקום קודם לסכום אינסוף איברים ואז אינסוף איברים אחרים מסרגים אותם ורק אז נכנסת לפעולה פעולת הקיבוץ. כלומר בסה"כ, מדובר על שילוב לא פשוט של קיבוץ וחילופיות. לא נתייחס כרגע למצבים מסובכים (בהקשר של התכונות האלגבריות הפשוטות) מהסוג הזה.

<u>הגדרה</u>: לטור שבו אברי הטור המקורי קובצו לקבוצות ע"י סוגריים (מבלי לשנות את סדר האברים) נקרא <u>טור מקובץ (או קיבוץ) של הטור המקורי</u>. (זו לא הגדרה מקובלת, אלא רק כדי שיהיה ברור על מה אנחנו מדברים).

שימו לב, אנחנו מרשים לכל איבר להיות רק בתוך זוג אחד של סוגריים. אם מדברים על איברים שנמצאים בתוך סוגריים שנמצאים בתוך סוגריים וכו', אולי עד אינסוף, אז צריך להגדיר למה בדיוק הכוונה, וזה שוב הופך את הסיפור למסובך יותר ממה שאנחנו רוצים לבחון כעת.

<u>דוגמה</u>: ניקח $a_n=(-1)^{n+1}$. הטור המקורי בברור מתבדר, אבל קיבוץ שלו באמצעות סוגריים שסוכמים זוגות, כמו בדוגמה המקורית, נותנת טור של אפסים שבברור מתכנס.

<u>מסקנה</u>: קיבוציות <u>לא מתקיימת</u> באופן כללי לטורים.

האם ישנם מקרים בהם היא בכל זאת מתקיימת? ראשית, אם הטור המקורי מתכנס, אז גם הטור המקובץ מתכנס.
הוכחה: סדרת הסכומים החלקיים שמתקבלת אחרי סכימת הסוגריים בנפרד היא תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי. כיוון שהסדרה המקורית מתכנסת, כל תת סדרה שלה מתכנסת, ולאותו הגבול.
שימו לב, שלא הנחנו כאן שהאברים חייבים להיסכם בזוגות דווקא. במקרה הזה כל קיבוץ של אברי הטור יתכנס, ולאותה התוצאה.

מתי בכל זאת ניתן להסיק מהטור המקובץ מבלי לבדוק את הטור המקורי?
ראשית, אם ידוע שהטור המקורי מתכנס, אז לפי המשפט הקודם, כל חלוקה לקבוצות של אברי הטור תיתן טור שמתכנס לאותה התוצאה. כלומר, אם חישבנו סכום של טור ע"י חלוקתו לקבוצות וסכימת התוצאה, כל מה שנשאר כדי לטעון שהתוצאה שקיבלנו היא סכום הטור, זה להוכיח שהטור המקורי מתכנס.

אם לא ידוע שהטור המקורי מתכנס, עדיין ייתכן שניתן ללמוד על התכנסותו מהתכנסות הטור המקובץ:
משפט: אם קיבצנו טור, וכל קבוצה מכילה אברים בעלי אותו הסימן בלבד (כרגיל, אפס יכול להיחשב כבעל סימן חיובי או שלילי לבחירתנו), אז הטור המקורי מתכנס, ולאותו הערך כמו זה של הטור המקובץ.
מסקנה: טור חיובי מתכנס אם"ם קיבוץ כלשהו שלו מתכנס.

דיברנו על פילוג ועל קיבוץ. נשאר לנו לבחון את תכונת החילופיות. ראשית, ברור שאם מחליפים סדר סכימה של מספר סופי של אברים הטור לא משתנה. הסיבה: במקרה הזה קיים n כך ש- S_n כולל כבר את כל האברים גם לפני וגם אחרי שינוי הסדר. כיוון שבאינדוקציה אפשר להוכיח שפעולת החיבור הרגילה היא חילופית, אז S_n מקבל את אותו הערך לפני ואחרי שינוי הסדר, וכנ"ל גם S_m, $\forall m > n$.

מה קורה כשמחליפים סדר של אינסוף אברים? אני רוצה להדגיש, בהחלפת סדר כזו הכוונה לסכימה של סדרה אינסופית של אברים שכוללת את כל אברי הטור רק בסדר שונה. אני לא מדבר על מקרה כללי יותר בו סוכמים אינסוף אברים ואז מוסיפים להם סכימה של אינסוף אברים אחרים וכו'. מקרה כזה יהיה הכללה של קיבוציות. אמנם המסקנות בשני המקרים זהות, אבל כדאי שנבין על מה בדיוק אנחנו מדברים. אז מה קורה? (רעיונות?)

משפט (קושי): החלפת סדר אברים בטור מתכנס בהחלט לא משנה את התוצאה.
ההוכחה מסתמכת על כך שסדרת הסכומים החלקיים של טור הערכים המוחלטים היא סדרת קושי (מונח שלא למדנו באינפי' 1 שמתאר סדרה מתכנסת), ושוב על אי שוויון המשולש.

מה לגבי טורים שאינם מתכנסים בהחלט? כאן יש לנו את אחת התוצאות היותר ביזאריות שניתקל בהן בקורס:

משפט רימן: ניתן לסדר אברי טור מתכנס בתנאי כך שהטור לאחר הסידור יתכנס למספר ממשי כלשהו לבחירתנו, או לאינסוף, או למינוס אינסוף, או שהוא לא יתכנס בכלל אפילו במובן הרחב.

תקציר ההוכחה: פרוק אברי הטור לשתי סדרות, של חיוביים ושל שליליים, בהתאם לסדר בו הם נמצאים בטור המקורי, $P_n = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$, $N_n = \begin{cases} |a_n| & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$. הטור המקורי לא מתכנס בהחלט ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתבדר לאינסוף ומכאן שלפחות אחד משני הטורים החיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} N_n, \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ מתבדר לאינסוף. אבל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n - \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנס ולכן לא ייתכן שרק אחד משני הטורים האלה מתבדר, כלומר שניהם חייבים להתבדר. כלומר גם הערכים החיוביים בנפרד וגם השליליים בנפרד מהווים מאגר של מספרים, שהערך המוחלט שלהם שואף לאפס, כי הטור המקורי מתכנס, אבל סכומם אינסופי.

כעת נבחר ערך סופי אליו אנחנו רוצים שהטור יתכנס. נניח בה"כ שהוא חיובי. ניקח אברים חיוביים עד שנעבור את הערך המבוקש למעלה (לצייר). כעת נתחיל להוסיף מהשליליים עד שנגיע לערך שקטן מהגבול המבוקש, וכך נמשיך לסירוגין לעבור מתחת ומעל הגבול המבוקש. חייבת להיות התכנסות כי האבר הכללי שואף בערך מוחלט לאפס, וחייבים להיות מספיק אברים כדי לעבור כל פעם את הגבול לצד השני כי סכום שני הצדדים בנפרד הוא אינסופי (לצייר). ההוכחה לאפשרויות האינסופיות דומות (לצייר מעבר של 1 עד למצב בו ניתן להוסיף שלילי שיהיה מעליו, ואז של 2 וכו'). בשביל המקרה שלא מתכנס אפילו במובן הרחב נעבור את 1 כלפי מעלה, ואז את -1 כלפי מטה לסירוגין (לצייר).

דוגמה: הזכרנו כבר שהטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים מתכנס בתנאי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. נגרום לו להתכנס לאפס. הערכים החיוביים שעומדים לרשותנו הם $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, והשליליים הם $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$. ניקח 1 כדי לעבור את האפס.

כעת נתחיל להוסיף שליליים $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{96}$. זה השלב בו צריך להתחיל להוסיף שוב חיוביים $-\frac{1}{96}+\frac{1}{3}=\frac{31}{96}$, וכעת שוב שליליים, $\frac{31}{96}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}=-\frac{503}{10080}$, ושוב חיוביים $-\frac{503}{10080}+\frac{1}{5}=\frac{1513}{10080}$. אמנם רואים בברור שכמות האברים שצריך להוסיף בצד השלילי גדולה בהרבה מזו שבצד החיובי, אבל זה לא משנה. מה שחשוב זה רק שבכל שלב כמותם סופית, ולכן התהליך יימשך, יעבור אינסוף פעמים משני הצדדים של הגבול שהגדרנו, והעיקר, יימצה את כל האברים בטור, וייתכנס לגבול הנכון.

סיכום מבחני התכנסות

לפני שנעבור לנושא הבא (טורי טיילור) נחזור ונסכם את מה שלמדנו על התכנסות של טורי מספרים:

השאלה המרכזית שהייתה לנו לגבי טורי מספרים היא שאלת ההתכנסות של הטורים: בהינתן טור האם הוא מתכנס או מתבדר? והחידוד של השאלה הזו: בהינתן טור האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר?

ראינו מספר קריטריונים להתכנסות של טורים. שאלתם כבר מספר פעמים איך לדעת באיזה קריטריון לבחור והתשובה היא שאין תשובה חד-משמעית לגבי הקריטריון הנכון. יש טורים שניתן לקבל עליהם תשובה באמצעות מספר קריטריונים שונים ויש כאלה שאף אחד מהקריטריונים שלמדנו לא יספיק כדי לתת עליהם תשובה. למעשה יש אפילו משפט שאומר שלא קיים קריטריון אוניברסלי שניתן לאבחן באמצעותו את כל הטורים.

קל למצוא דוגמאות של טורים שאנחנו לא יכולים להעריך את התכנסותם.

דוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$. השוואה לטור ההרמוני לא מספקת אינפורמציה וההתנהגות המחזורית של הסינוס כאוטית למדי ולא מאפשרת שימוש במשפט לייבניץ, כי אברי הטור לא מתחלפים באופן סדיר וגם אינם מונוטוניים בערכם המוחלט. אילו היינו לומדים הכללה של מבחן לייבניץ, הידועה כמבחן דיריכלה, היינו יכולים לראות שהטור הזה מתכנס. לחילופין, באמצעות שיטות של פונקציות מרוכבות אפשר לחשב את סדרת הסכומים החלקיים במפורש ולהראות שהיא מתכנסת ואפשר אפילו לחשב את הגבול: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{\pi-1}{2}$.

דוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ כשכל מה שידוע זה $a_n\in\mathbb{N},\forall n\neq m, a_n\neq a_m$. הטור מתבדר בגלל החלפות בזוגות, כי מתקיים עבור סדרת הסכומים החלקיים, $S_N\le\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, כלומר הטור חסום ע"י הטור ההרמוני מלרע ולכן מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ כשהגדרנו את p_n להיות המספר הראשוני ה- n. כדי להתייחס לדוגמה הזו שום מבחנים חדשים לא יעזרו. למעשה האינפורמציה הנדרשת לנו לא מגיעה בכלל מהתחום של חקר טורים או של אינפי' באופן כללי, אלא מהתחום של תורת המספרים, שבמסגרתה מטפלים במספרים ראשוניים. למעשה כבר בהגדרה יש שימוש בתורת המספרים, כי מניחים את העובדה שמוכיחים בתורת המספרים, לפיה יש אינסוף מספרים ראשוניים. האינפורמציה הנוספת שאנחנו זקוקים לה מתורת המספרים היא משפט המספרים הראשוניים שקובע שמתקיים $\frac{p_n}{n\ln(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. כעת הצבה במבחן ההשוואה הגבולי מראה שהטור שהגדרנו והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ מתנהגים באותה צורה. הראנו כבר שהטור האחרון מתבדר (ע"י מבחן האינטגרל) ולכן גם הטור המקורי מתבדר.

למרות זאת, למקרים הפשוטים בהם אנחנו עשויים להיתקל ***במסגרת הקורס*** ניתן לתאר סוג של אלגוריתם עבור גישה לשאלת ההתבדרות/ההתכנסות (בתנאי/בהחלט) שלהם. האלגוריתם לא תמיד אופטימלי, אבל הוא יכול לעזור בהתמודדות עם רוב הדוגמאות שתיתקלו בהן, לכל הפחות בקורס.

0. בכל קריטריון מספיק לבדוק האם הוא מתקיים לפחות לזנב כלשהו של הטור.
1. התנאי ההכרחי: האם האיבר הכללי שואף לאפס? אם לא, הטור מתבדר. אם כן צריך להמשיך בבדיקה. שימו לב שלפעמים יותר קל להשתמש במבחן המנה או השורש מלבדוק ישירות את התנאי ההכרחי. במקרים האלה זה מה שנעשה.

2. <u>האם הטור שייך לאחת משתי המשפחות</u>: טור הנדסי $a_n = a_0 q^n$ ($a_0 \neq 0$) או טור הרמוני מוכלל $a_n = \frac{1}{n^p}$? אם כן, מעבר למבחנים הספציפיים של שני הטורים האלה.
3. <u>האם הטור טלסקופי</u>? אם כן, האם קיים הגבול $b_n \to c$? בד"כ הקבוע יהיה אפס.
4. <u>האם ניתן לפרק את הטור לסכום טורים מתכנסים/סכום של טור מתבדר וטור/טורים מתכנסים</u>? לכל פרוק לבדוק מהתחלה את הקריטריונים.
5. <u>האם הטור חיובי</u>? אם כן, מעבר לבדיקות של טורים חיוביים, אם לא בדיקת התכנסות בהחלט ואחריה המשך <u>בדיקת התכנסות בתנאי</u> (לצייר חיצים בשני צבעים וגם טקסט תואם בשני צבעים).
6. <u>מבחנים לטורים חיוביים</u>: סדר הקלות בשימוש הוא בד"כ: <u>מבחן ההשוואה הגבולי</u> – <u>למשל לטור הרמוני מוכלל</u> (השוואה גבולית לטור ההנדסי מבוצעת אוטומטית ע"י מבחני המנה והשורש), <u>מבחן המנה</u> – שימושי במיוחד <u>כשיש עצרת בהגדרת</u> a_n, מבחן השורש – שימושי במיוחד <u>כשיש חזקות בהגדרת</u> a_n וחשוב לזכור $\sqrt[n]{n} \to 1$, <u>מבחן ההשוואה</u>, אם אברי הטור מונוטונים יורדים, <u>מבחן האינטגרל</u> – ייתכן שצריך להשתמש בשיטת ההצבה. לפעמים יש צורך ביותר ממבחן אחד, למשל השוואה (רגילה או גבולית) לטור אחר שעליו אנחנו מסיקים מסקנה באמצעות מבחן האינטגרל.
7. <u>טורים לא חיוביים – בדיקת התכנסות בתנאי</u>: <u>האם טור לייבניץ</u>? אם כן אז מתכנס (לפחות בתנאי), <u>מבחני מנה ושורש לטורים כלליים</u>.
8. <u>שום דבר לא עבד</u>? שימוש ב<u>זהויות טריגונומטריות/לוגריתמיות/חוקי חזקות</u>, אולי ע"י שימוש בהן נראה שהטור בכל זאת טלסקופי (זכרו, כל טור ניתן לכתיבה כטור טלסקופי, השאלה אם זה מקדם אותנו לאנשהו)? ביטוי מפורש ל- S_n ושימוש בהגדרה? חזרה לנקודת ההתחלה.

<u>תיאור ע"י טבלה של מבחני ההתכנסות</u> מופיע <u>במודל</u>, תחת "חומרי עזר נוספים". אתם מוזמנים לעיין גם בו.

הגדרות אלטרנטיביות להתכנסות טורים. נסתפק בלציין שבמקרים מסוימים אנחנו מעוניינים להחליט שטורים מתכנסים גם אם הם בבירור מתבדרים ואז נשאלת השאלה: האם זה בכלל אפשרי, אפילו אם אנחנו מוותרים על ההגדרה הרגילה של התכנסות טורים, ולאיזה ערך הם מתכנסים. לא ננסה הסמסטר להבין את העניין הזה, אבל נכתוב דוגמה לטור שאפשר להחליט שהוא מתכנס וטור שלא מתכנס בשום מצב: $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+...$ טור הרמוני מוכלל עם $a=-1$, והטור ההרמוני הרגיל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$. מי מהם לדעתכם הוא הטור שאפשר להכריח אותו להתכנס? הטור ההרמוני תמיד מתבדר. לא יעזור כלום. לגבי הטור הראשון, אפשר אם מתעקשים ממש חזק להחליט שהוא מתכנס. במקרה הזה קיים ערך ברור לגבול של הטור הזה, וחייב להתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+... = -\frac{1}{12}$.

טורי חזקות

טורי חזקות הם מקרה פרטי של טורי פונקציות. נדבר יותר בפרוט על התבדרות ועל טורים של פונקציות בהמשך, כי נוח לנו להתחיל מהמקרה הפרטי הפשוט והמאד שימושי של טורי חזקות. בכל זאת, כדי שיהיה ברור בהקשר כללי על מה אנחנו מדברים ניתן את ההגדרה הבאה:

<u>הגדרה</u>: תהיינה $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) פונקציות ממשיות. <u>טור פונקציות</u> $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ הוא פונקציה ממשית המוגדרת בכל נקודה x_0 שהצבתה כערך הפונקציה נותן טור מספרים מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$. לכל נקודה x_0 בה הטור מתכנס נאמר שטור הפונקציות <u>מתכנס נקודתית</u> (<u>לרשימה</u>) ב- x_0 לערך $S(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$.

למה "התכנסות נקודתית"? כי נראה בהמשך שיש עוד סוגים של התכנסות שאפשר לדבר עליהם.

השאלה המעניינת הנוגעת להגדרה היא <u>אפיון קבוצת הנקודות (תחום ההתכנסות) בהן טור הפונקציות מתכנס</u>.

<u>בתחום ההתכנסות שלו טור פונקציות מגדיר פונקציה ממשית</u> $S(x)$.

שימו לב, יכול להיות שהפונקציה שמתקבלת היא כזו שניתן להרחיב בצורה טבעית את תחום ההגדרה שלה לערכים נוספים של x, אבל מבחינתנו תחום ההגדרה של הפונקציה המתקבלת הוא תחום ההתכנסות.

דוגמה: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. זה טור הנדסי שידוע לנו שמתכנס עבור $|x|<1$ לפונקציה $f(x)=\frac{1}{1-x}$. אנחנו יכולים לכתוב $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, אבל תחום ההגדרה של הפונקציה שמוגדרת בצורה הזו הוא לא $x\neq 1$ אלא $|x|<1$.

ברור שבמקרה כללי של טור פונקציות מציאת תחום ההתכנסות היא שאלה שעשויה להיות מורכבת ביותר, כי עקרונית בכל נקודה יש לנו טור מספרים חדש ושונה. ייתכן שטור ההתכנסות הוא כל הישר הממשי, ייתכן שהוא קבוצה ריקה, וייתכן למעשה גם שהוא כל קבוצה חלקית אחרת של ממשיים.
אבל כרגע מעניין אותנו מקרה פרטי פשוט במיוחד, שמכליל את הדוגמה שראינו. זה המקרה שבו כל הפונקציות הן חזקות שונות של המשתנה. נראה שאפיון קבוצת נקודות ההתכנסות במקרה הזה היא פשוטה למדי. אבל קודם:

<u>הגדרה</u>: טור פונקציות מהצורה $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ייקרא <u>טור חזקות סביב הראשית</u> (<u>לרשימה</u>).

טור פונקציות מהצורה $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ייקרא <u>טור חזקות סביב</u> x_0 (<u>לרשימה</u>).

הקבועים $a_n\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,...)$ ייקראו <u>מקדמי הטור</u> (<u>לרשימה</u>).

שימו לב שאנחנו מסמנים כעת ב- a_n את ***מקדמי הטור***, ואילו עד עכשיו סימנו כך את ***איברי הטור***. אלה יצורים שונים. לפעמים כדי להדגיש את זה מסמנים את המקדמים באות אחרת, למשל c_n אבל בד"כ לא, אז כדאי להתרגל לזה. מקדמי הטור הם אברי טור המספרים המתקבל בהצבת $x=x_0+1$, אבל הם שונים בד"כ מאיברי הטור המתקבל בהצבת ערכים מספריים אחרים לטור החזקות.

שימו לב שטור חזקות כמעט תמיד מתחיל מ- $n=0$. אמנם יכול להיות שהמקדמים הראשונים יתאפסו כך שהטור יתחיל אפקטיבית ב- n גדול יותר. אבל עדיין ניתן לכתוב אותו החל מאיבר האפס.

<u>דוגמה</u>: הטור $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ הוא טור חזקות ביחס למשתנה x (ברור שהוא גם טור חזקות ביחס ל- x^2). הסיבה היא שכל הביטויים שמופיעים באגף ימין הן חזקות שלמות ואי-שליליות של x . חלק מהחזקות לא מופיעות, אבל ניתן לכתוב את זה כאילו שהן מופיעות עם מקדמים אפס, ספציפית $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ עבור $a_n=\begin{cases}1 & n \text{ even}\\ 0 & n \text{ odd}\end{cases}$.

שימו לב שישנה בעיה טכנית קטנה עם ההגדרה שכתבנו. כדי להסביר מה הבעיה וגם לפתור אותה נגדיר:

<u>הגדרה</u>: בטורי חזקות נפרש את הביטוי $0^0=1$, כלומר נפרש את האיבר הראשון בטור בנקודה סביבה אנו מפתחים אותו בצורה, $a_0(x_0-x_0)^0=a_0$.

הסיבה שבגללה אנחנו בוחרים את ההגדרה הזו היא כדי לקבל רציפות ביחס למשתנה x , שהוא משתנה ממשי. ביחס ל- n שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים אין משמעות לרציפות, כך שזו הבחירה ההגיונית, שגם תפשט את החיים בהמשך.

שימו לב, שלטור חזקות סביב x_0 ניתן להגדיר $y=x-x_0$ וביחס למשתנה החדש מתקבל טור חזקות סביב הראשית. כלומר, <u>ניתן לכתוב כל טור חזקות סביב נקודה כלשהי</u> x_0 <u>כטור חזקות סביב הראשית במשתנה אחר</u>. לכן אין הגבלה של הכלליות בדוגמאות ומשפטים שעוסקים רק במקרה הזה, כי קל מאד לתרגם אותם בחזרה למקרה הלכאורה יותר כללי. אבל ***חשוב לא לשכוח לתרגם חזרה***.

ניתן להגדיר לטור חזקות את פונקציית הסכומים החלקיים $S_n(x)$. הפונקציה הזו היא פולינום, ולכן נוח מאד לעבוד איתה. אפשר לומר שטורי חזקות הם הכללות של פולינומים. זה חלק מהמוטיבציה שלנו לדבר עליהם בנפרד משאר טורי הפונקציות.

כמו שציינו, השאלה הראשונה שמעניינת אותנו בהקשר של טורי חזקות היא מתי הם מתכנסים. כלומר עבור איזה תחום של מספרים ממשיים שנציב בטור נקבל טור מתכנס. באופן פורמלי: <u>עבור אילו ערכי</u> x <u>סדרת המספרים</u> $S_n(x)$ <u>מתכנסת</u> ל- $S(x)$?

דוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ כאן לא יכולנו להתחיל מאפס עם הנוסחה הזו, כי הגדרנו $0^0=1$ רק עבור x^0. עבור $n=0$ הביטוי נותר לא מוגדר.

במקרה הזה מבחן השורש מראה שהטור מתבדר לכל $x \neq 0$. עבור $x=0$ מתקבל $S(0)=a_0=0$ (ברור למה $a_0=0$ כאן?). למעשה אנחנו רואים כאן תכונה כללית: כל טור חזקות סביב x_0 מתכנס בנקודה x_0 וערכו בנקודה זו הוא a_0 (שימו לב שאין שום קשר בין האינדקס 0 של x_0 שנבחר שרירותית – יכולנו באותה מידה לכתוב $\tilde{x}$ לבין a_0 שבו לאינדקס 0 יש באמת משמעות).

דוגמה: $a_n = 0$ עבור $n > N$ כלשהו. הטור הוא פולינום, ולכן מתכנס לכל מספר ממשי.

דוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (שוב לא יכולנו להתחיל מאפס עם הנוסחה הזו ולכן שוב בחרנו לכתוב באופן לא מפורש $a_0=0$). נראה בקרוב שכשהטור מתכנס ההתכנסות היא לפונקציה $-\ln(1-x)$. מבחן המנה או מבחן השורש מראים שעבור $|x| < 1$ הטור מתכנס בהחלט. עבור $x = 1$ מתקבל הטור ההרמוני המתבדר, ואילו עבור $x = -1$ מתקבל הטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים, שמתכנס לפי משפט לייבניץ. כלומר הטור מתכנס עבור $x \in [-1,1)$. ברגע שנוכיח שההתכנסות היא אכן לפונקציה שהזכרנו תתקבל הטענה שהזכרנו כבר לפיה הטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים מתכנס ל- $\ln 2$.

בדוגמאות שעשינו קיבלנו תחום התכנסות של הטור שהיה נקודה, כל הישר הממשי, וקטע. קבוצות די פשוטות. האם ייתכן משהו יותר מסובך מזה? על השאלה הזו עונה המשפט הבא:

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות סביב הראשית ותהי $\tilde{x} \neq 0$ נקודה בה הטור מתכנס, אזי הטור מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס) לכל נקודה x שמקיימת $|x| < |\tilde{x}|$.

הוכחה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ מתכנס, ולכן לפי הקריטריון ההכרחי להתכנסות טורים $a_n \tilde{x}^n \to 0$, ובפרט חסום $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \; |a_n \tilde{x}^n| < M$. תהי x כך ש- $|x| < |\tilde{x}|$, אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n \frac{x^n}{\tilde{x}^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$. כאן הגדרנו $q \equiv \frac{x}{\tilde{x}}$ ומתקיים $|q| < 1$. איברי הטור מקיימים $|b_n q^n| < M |q|^n$, ולכן לפי משפט ההשוואה הטור שאיבריו הם $|b_n q^n|$ מתכנס, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט.

מסקנה: תחום ההתכנסות של טור חזקות סביב x_0 הוא אחד מהבאים: 1. x_0 בלבד, 2. הישר כולו, 3. קטע בעל אורך סימטרי סביב x_0.

הוכחה: נגדיר R להיות הסופרימום של $|x - x_0|$ לכל הנקודות x בתחום ההתכנסות. אם $R=0$ אז מהגדרתו לא קיימות נקודות מלבד x_0 בהן הטור מתכנס, וידוע לנו שהטור מתכנס בנקודה זו. אם $R=\infty$ אז $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y$ בתחום ההתכנסות שמקיים $|y - x_0| > |x - x_0|$ ולכן לפי המשפט הטור מתכנס לכל x (לצייר). אם $0 < R < \infty$ אז $\forall x, |x - x_0| < R$ בתחום ההתכנסות $\exists y, |x - x_0| < |y - x_0| < R$, ולכן ישנה התכנסות בקטע הפתוח $(x_0 - R, x_0 + R)$ ומהגדרת R אין התכנסות לשום נקודה שמקיימת $|x - x_0| > R$ (לצייר).

שימו לב שהמשפט וההוכחה לא מתייחסים לשאלה ***האם טור שמתכנס בקטע מתכנס בקצוות של הקטע***. כל האפשרויות יכולות להתקיים. ייתכן שההתכנסות היא בקטע הפתוח, לגביו הוכחנו את המשפט, או בקטע הסגור המתאים, או בקטע פתוח מצד אחד וסגור מצד שני.

הגדרה: R במשפט הקודם ייקרא רדיוס ההתכנסות של הטור (לרשימה).

דוגמה: $\sum x^n$. רדיוס התכנסות 1, אין התכנסות בשני קצוות הקטע.

דוגמה: $\sum \frac{x^n}{n^2}$. שוב רדיוס התכנסות 1, והפעם התכנסות בשני קצוות הקטע.

דוגמה: $\sum \frac{x^n}{n}$. שוב רדיוס התכנסות 1, והפעם התכנסות (בתנאי) בקצה אחד והתבדרות בשני.

שימו לב שהדרך היחידה שבה תהיה התכנסות בנקודת קצה אחת ולא בשנייה היא אם ההתכנסות היא בתנאי.

הוכחה: טור המספרים של הערכים המוחלטים שמתקבל בשתי נקודות הקצה זהה $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|R^n$.

שימו לב גם לכך שרדיוס התכנסות הוא מאפיין של טורי חזקות, לא של טורי פונקציות כלליים. ***קבוצת נקודות ההתכנסות במקרה של טורי חזקות כלליים יכולה להיות מאד מסובכת*** וראינו כבר דוגמה לזה. תשתדלו לא להתבלבל בעניין הזה!

רדיוס התכנסות של טורי חזקות

ראינו שתחום ההתכנסות מוגדר לחלוטין ע"י רדיוס ההתכנסות, מלבד נקודות הקצה של הקטע במקרה של רדיוס התכנסות $0<R<\infty$.

אגב, למה "רדיוס התכנסות"? איפה יש כאן עיגול? התשובה היא שיש עיגול כשמכלילים את התיאור הזה לפונקציות מרוכבות. תחום ההתכנסות במקרה הזה הוא עיגול שיכול לכלול חלק כלשהו מהנקודות על השפה שלו. ייתרה מזו, על שפת העיגול בהכרח תהיה נקודה שמהווה מחסום להתכנסות הטור, כלומר סוג של נקודה סינגולרית.

דוגמה: בהקשר של טורי טיילור נראה שבתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$.

מה רדיוס ההתכנסות? ההכללה של מבחן השורש (שמדברת על חסם עליון במקום על גבול, בגלל כל האפסים) מראה שהוא 1. מהו תחום ההתכנסות? צריך לבדוק בנפרד את שתי הנקודות שבקצות הקטע ומתקבל שיש התבדרות בשני קצוות הקטע כי בשניהם מתקבל הטור המתבדר $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. למה הטור מתבדר "באמת"? כי לפונקציה המתקבלת יש נקודה סינגולרית במישור המרוכב בנקודה $x=i$. לא נעסוק בכך מעבר לזה שהזכרתי את העובדה המעניינת הזו, אבל תחזרו לזה בקורס במרוכבות.

שימו לב שניתן לחשוב על הטור הזה גם כטור חזקות ביחס למשתנה חדש $y\equiv x^2$, בעל מקדמים: $\{1,-1,1,\dots\}$. היכולת להציב פונקציה (כאן x^2) בטור חזקות לקבלת טור חזקות חדש היא שימושית למדי.

איך נמצא את רדיוס ההתכנסות? החזקות שמופיעות בטור רומזות ששימוש במבחן השורש או במבחן המנה עשוי לתת את התוצאה, בהנחה שמקדמי הטור לא משתוללים יותר מדי. מכאן מתקבל:

משפט: אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ אז מתקיים $R=\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, ואם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ אז מתקיים $R=\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$.

הביטוי לרדיוס ההתכנסות נראה בדיוק כמו אחד חלקי הביטוי שקובע התכנסות בקריטריון המנה, אבל שימו לב שיש ביניהם הבדל חשוב, ***בקריטריון המנה מופיעים אברי טור, ואילו כאן מופיעים מקדמי טור*** (זוכרים מה ההבדל?).

ההוכחה היא הצבה מיידית במבחני השורש והמנה לטורים כלליים, אז אשאיר אותה לכם.

לא לשכוח שאחרי שמצאנו את רדיוס ההתכנסות צריך לבדוק עדיין את נקודות הקצה באופן מפורש.

דוגמה: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n!}=e^{-(x-2)^2}$. שימוש במשפט המנה מראה שההתכנסות היא לכל x ממשי. ניתן להשתמש גם בצורה שעוסקת במבחן השורש אבל אז צריך לעבוד קצת כדי להראות שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$, $(n!)^{1/n}=(1\cdot\ldots\cdot(n/2)\cdot(n/2+1)\cdot\ldots\cdot n)^{1/n}>\left((n/2)^{n/2}\right)^{1/n}=\sqrt{n/2}\to\infty$. כאן הסתכלנו רק על המקרה של n זוגי, אבל כיוון שהעצרת היא פונקציה מונוטונית אין כאן הגבלה של הכלליות.

תכונות אלגבריות של טורי חזקות

עסקנו בתכונות אלגבריות של טורי מספרים. מהמסקנות שהגענו אליהן ניתן לקבל תכונות אלגבריות לטורי חזקות:

יהיו $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ טורי חזקות סביב הראשית, ו- $c\in\mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(ca_n\right)x^n=cS_1(x)$ ולטורים בשני האגפים יש את אותו תחום התכנסות לכל $c\neq 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n=S_1(x)+S_2(x)$,

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\equiv\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n\right)=S_1(x)S_2(x)$,

ורדיוס ההתכנסות של הטורים בשני המקרים האחרונים הוא לפחות הקטן מבין רדיוסי ההתכנסות של שני הטורים.

שימו לב שהגדרנו פעולה חדשה של מכפלת טורי חזקות (לרשימה). ההכפלה מבוצעת ע"י איסוף כל האיברים שיש להם חזקה נתונה של x. כיוון שכל החזקות הן אי שליליות, לכל חזקה נתונה יש מספר סופי של איברים שתורמים לה.

הפעולה החדשה הזו של מכפלת חזקות ואיסוף חזקות שונות ממקדמים שונים ***שימושית ביותר במבחר יישומים***. ניתן למשל לפתור משוואות דיפרנציאליות ע"י ביטוי של הפתרון הלא ידוע כטור חזקות, וקבלת משוואות למקדמים השונים. ניתן למצוא פונקציות הפוכות ע"י הצבת פיתוח כטור חזקות לתוך טור חזקות ידוע והשוואת התוצאה ל- x. ניתן גם להגדיר פונקציות יוצרות, אלה פונקציות שמוגדרות ע"י טור חזקות במטרה לקודד סדרת מספרים $\{a_n\}\to\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. נגזרות ומכפלות של הפונקציה היוצרת מחליפות מערכות אינסופיות של משוואות בין איברי הסדרה, ומאפשרות למשל לחשב את אברי הסדרה ועוד. נדבר על זה בהמשך הקורס.

ניתן להכליל בקלות גם לטורים שאינם סביב הראשית, ובלבד ששני הטורים מוגדרים סביב אותה נקודה x_0, אחרת, לא ברור מה אנחנו בכלל מה מנסים לעשות, ומי אמור להיות טור החזקות החדש.

דוגמה: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2^n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2x\right)^n=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}$, כי פרקנו את הטור לסכום של שני טורים הנדסיים. תחום ההתכנסות: $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

דוגמה: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n-x^n\right)=\frac{1}{1-x}+\left(-\frac{1}{1-x}\right)=0$. עכשיו תחום ההתכנסות גדול יותר מזה של שני הטורים המקוריים.

דוגמה: $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}=1+\left(x+(-x)\right)+(x^2\cdot 1+1\cdot x^2-x\cdot x)+\cdots$.

כאן השתמשנו במכפלת טורים כדי לכתוב מספר איברים ראשונים של הטור שמתאים לפונקציה באגף שמאל. ניתן להשתמש בקומבינטוריקה כדי למצוא ביטוי כללי לכל המקדמים, אבל כמובן שיותר פשוט להציב x^2 במקום x בטור החזקות $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ולקבל $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$.

מכפלת טורים היא פעולה שימושית במיוחד במקרים בהם אחד מהטורים סופי. למשל $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$, $h(x)=\frac{1-x}{1+x}$. מהו $g(x)h(x)$? מכפלת טורים נותנת 1. מבחינה של הפונקציות המקוריות ברור למה.

"פעולה" נוספת היא הצבה.

הפעולה הזו של הצבה של פונקציה של x בתוך טור חזקות שימושית כדי לקבל טורי חזקות חדשים, במקרה שמציבים חזקה שלמה של x וגם כדי לנתח טורי פונקציות כלליים יותר.

דוגמה: תחום ההתכנסות של טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty}(\sin x)^n$ הוא כל הישר למעט הנקודות $x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$.

מלבד התכונות האלגבריות של טורי החזקות שתיארנו יש עוד 3 תכונות חשובות מאד מהצד של החשבון האינפי' שמתקיימות בתחום ההתכנסות שלהן. נכתוב אותן כמשפטים ללא הוכחה. ההוכחה מסתמכת על דברים שנלמד בהמשך בהקשר הכללי יותר של טורי פונקציות ונתייחס אליה כשנגיע לדבר על זה:

משפט: טור חזקות מתכנס לפונקציה רציפה בתחום ההתכנסות שלו, ואם הוא מתכנס בנקודות קצה, $x=\pm R$ הפונקציה המתקבלת רציפה בנקודות אלה מימין או משמאל.

משפט: טור חזקות $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס לפונקציה גזירה בקטע הפתוח (R,R) וניתן להחליף את סדר הגזירה והסכימה, כלומר בקטע הפתוח מתקיים $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. אם נכתוב את הנגזרת בצורה סטנדרטית ע"י $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתקבל $b_n=(n+1)a_{n+1}$. להחלפה של סדר הסכימה והגזירה קוראים לפעמים "גזירה איבר איבר של הטור" (לרשימה).

משפט: ניתן לחשב אינטגרל של טור חזקות $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (קיים כי הפונקציה רציפה) בתחום ההתכנסות ע"י החלפת סדר האינטגרציה והסכימה, כלומר מתקיים $\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}x^n}{n}$. אם נכתוב את האינטגרל בצורה סטנדרטית ע"י $\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתקבל $b_n=\begin{cases}C & n=0\\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0\end{cases}$, זו אינטגרציה איבר איבר של הטור (לרשימה).

בחישוב של אינטגרל מסוים בתחום ההתכנסות של הטור נוח בד"כ לבחור את קבוע האינטגרציה, כלומר את b_0 להיות אפס, אבל לפעמים נוח לבחור ערך אחר. כמובן שזה לא משנה את התוצאה.

שימו לב: בגזירה נשמר רדיוס ההתכנסות אבל גזירות מצד אחד של הפונקציה המתקבלת יכולה להעלם בנקודות הקצה. באינטגרל בדיוק להפך. ייתכן שהפונקציה המקורית לא מתכנסת בנקודת קצה, אבל האינטגרל כן.

מסקנה: טור חזקות בעל $R>0$ מתכנס לפונקציה שגזירה אינסוף פעמים ברציפות. למעשה לפונקציה אנליטית (לרשימה).

המסקנה היא אינדוקציה על המשפט של הגזירות. אנליטיות היא תכונה חזקה יותר מגזירות אינסוף פעמים. תלמדו עליה בקורס בפונקציות מרוכבות.

דוגמה: מעבר מ- $\frac{1}{1-x}$ ל- $\ln(1-x)$ וחזרה. זו גם ההוכחה שחסרה לנו עד כה לטור של ה-לן, ספצפית, עבור $x=-1$ מתקבל הטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$. גזירות נוספות של $\frac{1}{1-x}$ בהכרח יביאו לטורים שאינם מתכנסים בקצוות. ניתן כך לקבל טורים של $\frac{1}{(1-x)^n}$ לכל n ולכולם אותו תחום התכנסות (לחשב שתי נגזרות ראשונות).

דוגמה: נתון הטור $f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. מה תחום ההתכנסות שלו, מהן נגזרותיו, ומהי הפונקציה המתקבלת?

נמצא את רדיוס ההתכנסות ע"י המשפט המתבסס על מבחן המנה $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. אנחנו מסיקים שהפונקציה גזירה ברציפות אינסוף פעמים על כל הישר הממשי. מהי הנגזרת הראשונה? נחליף סדר גזירה ואינטגרציה $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$. אנחנו יודעים שהפונקציות היחידות שמקיימות את המד"ר $f'(x)=f(x)$ על כל הישר הממשי הן הפונקציות $f(x)=ce^x$. נשאר למצוא את הקבוע c. נבדוק מה ערך הפונקציה בנקודה $x=0$, $f(0)=a_0=\frac{1}{0!}=1=ce^0=c$, כלומר $f(x)=e^x$. למעשה ***זו דרך אפשרית להגדרת פונקציית האקספוננט***.